

Н.Н. Якименко, канд. ф-м. наук

Кировоградский национальный технический университет

О.П. Червинко, канд. ф-м. наук

Институт механики НАНУ, г. Киев

Силовой гармонический антиплоский сдвиг вязкоупругой призмы с цилиндрическим включением

В рамках теории связанной термовязкоупругости дана постановка задачи о колебаниях и виброразогреве прямоугольной призмы с цилиндрическим включением при антиплоском силовом сдвиге. Рассмотрены случаи жесткого и мягкого включений. Изучена кинетика виброразогрева и особенности полей напряжений и температуры.

прямоугольная призма, включение, виброразогрев

Элементы конструкций и изделия из полимерных материалов в процессе эксплуатации подвергаются различного рода механическим и тепловым воздействиям. Одним из наиболее распространенных видов нагружения является циклическое нагружение. Вследствие таких специфических особенностей полимеров, как значительные гистерезисные потери, высокая чувствительность механических характеристик к температуре и низкая теплопроводность, возникает необходимость учета одного из наиболее важных термомеханических эффектов – диссипативного виброразогрева [1]. Интенсивность виброразогрева и характер распределения температуры зависит также от наличия концентраторов напряжений. Тела с концентраторами напряжений можно разделить на две группы. К первой из них относятся элементы конструкций, имеющие нерегулярности формы типа отверстий, надрезов, включений и т.п. В их окрестности под действием эксплуатационных циклических нагрузок формируются высокие уровни напряжений. Вместе с ними возрастают риски возникновения усталостных трещин или зон диссипативного разогрева, снижающих несущую способность деталей. Ко второй группе объектов относятся изделия, которые подвергаются обработке с помощью ультразвуковой сварки. В частности, наполнителями или армирующими элементами композитов на полимерной основе могут быть дисперсные частицы, волокна и т.п. При ультразвуковой сварке композитов вследствие концентрации напряжений в окрестности армирующих элементов возможен локальный перегрев и термическая деструкция полимерной матрицы. С другой стороны, средняя объемная температура композита в зоне сварки может оказаться недостаточной для формирования сварного соединения. Поэтому исследование таких процессов играет важную роль в определении рациональных технологических приемов и параметров, обеспечивающих оптимальное соотношение локальных и усредненных значений температуры виброразогрева [2].

Изучается напряженно-деформированное состояние и виброразогрев вязкоупругой призмы квадратного сечения $|x| \leq a$, $|y| \leq a$ с цилиндрическим включением радиуса r . Четверть призмы $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ показана на рис. 1а. Призма подвергается квазистатическому гармоническому силовому сдвигу из плоскости xOy с амплитудой сдвигового напряжения σ_0 .

Постановка задачи включает уравнения колебаний и теплопроводности [1]

$$\operatorname{div} \tilde{\sigma} = 0, \quad (1)$$

$$c_v \dot{\theta} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) + \bar{D}', \quad (2)$$

определяющие уравнения

$$\tilde{s} = 2\tilde{G}\tilde{e}, \quad \tilde{\sigma}_{kk} = 3\tilde{K}\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad \bar{D}' = \beta \frac{\omega}{2} \operatorname{Im}(\tilde{\sigma} : \tilde{\varepsilon}^*). \quad (3)$$

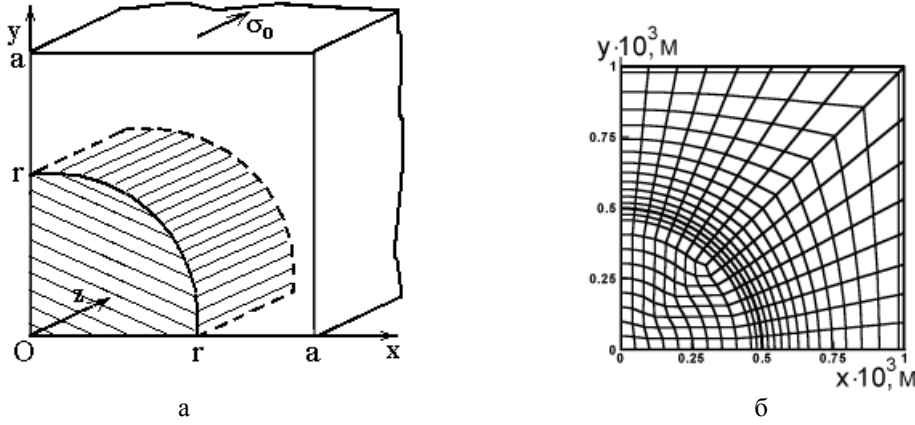


Рисунок 1 – Напряженно-деформированное состояние и виброразогрев вязкоупругой призмы квадратного сечения

В соотношениях (1) – (3) $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ – комплексные амплитуда тензоров напряжения и деформации, $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}$; \tilde{s}_{ij} и \tilde{e}_{ij} – соответствующие им комплексные амплитуды девиаторов; \tilde{u}_i – вектор амплитуды перемещения; θ – температура; \tilde{G} и \tilde{K} – комплексные модули сдвига и объемного сжатия, $\tilde{G} = G' + iG''$, \bar{D}' – средняя за период объемная скорость диссипации механической энергии; $\tilde{\varepsilon}_{ij}^*$ – величина, комплексно сопряженная амплитуде деформации $\tilde{\varepsilon}_{ij}$; β – доля диссипированной энергии, перешедшая в тепло, $0 \leq \beta \leq 1$; ω – частота нагружения; c_v и k – коэффициенты объемной теплоемкости и теплопроводности, соответственно.

Соотношения (1)-(3) должны быть дополнены граничными (механическими и тепловыми) и начальным условием (для температуры).

Граничные и начальное условия для температуры имеют вид

$$\begin{aligned} \mp k \theta_{,x} &= \alpha(\theta - \theta_c), \quad x = \pm a, \\ \mp k \theta_{,y} &= \alpha(\theta - \theta_c), \quad y = \pm a \\ \theta &= \theta_0 \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь θ_c – температура окружающей среды, α – коэффициент теплоотдачи.

Механические граничные условия для перемещений и напряжений в рассматриваемом нами случае силового антиплоского сдвига – сдвига вдоль включения в направлении оси Oz – имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{yx} = \tilde{\sigma}_{yy} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{yz} = \sigma_0, \quad y = \pm a, \quad (5)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = \tilde{\sigma}_{xx} = \tilde{\sigma}_{xz} = 0, \quad y = \pm a, \quad (6)$$

Здесь σ_0 – амплитуда возбуждения.

Такие граничные условия отвечают деформации призмы прямоугольного сечения, сдвигаемой в направлении z антисимметрично относительно плоскости xOz

постоянным сдвиговым напряжением σ_0 . При этом в призме возникает состояние сдвига в плоскости yOz . Для этого состояния выполняются следующие условия

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \tilde{\sigma}_{yy} = \tilde{\sigma}_{zz} = \tilde{\sigma}_{xy} = 0; \quad \tilde{u}_x = \tilde{u}_y = 0, \quad \tilde{u}_z = \tilde{u}_z(x, y). \quad (7)$$

С учетом (7) уравнения квазистатического равновесия (1) принимают вид

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_{yz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Обозначим $\tilde{u}_z = \tilde{\psi}(x, y)$, тогда для напряжений имеем $\tilde{\sigma}_{xz} = \tilde{G} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}$, $\tilde{\sigma}_{yz} = \tilde{G} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}$,

и задача (1), (3), (5), (6) в терминах функции $\tilde{\psi}$ приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{G} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{G} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \right) = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = 0, \quad x = a;$$

$$\tilde{G} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} = \sigma_0, \quad y = a; \quad (10)$$

$$\tilde{\psi} = 0, \quad y = 0.$$

Задача (1) – (10) решается численно методом конечных элементов [3] с использованием шаговых по времени методов.

Решение находится из условий стационарности лагранжевых функционалов

$$\delta \tilde{\mathcal{E}} = 0, \quad \delta I = 0,$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \int_V (\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} - \tilde{b}_i \tilde{u}_i) dv - \int_S \tilde{f}_i \tilde{u}_i ds,$$

$$I = \frac{1}{2} \int_V \left[k \theta_{,i} \theta_{,i} + 2 \int_{\theta_0}^{\theta} c_v \dot{\theta} d\theta - 2 \theta \bar{D}' \right] dv + \frac{1}{2} \int_S \gamma (\theta - 2 \theta_c) \theta ds.$$

Используется восьмиузловой изопараметрический четырехугольный элемент с квадратичной аппроксимацией перемещений и температуры. Разбивка области на элементы показана на рис. 1б.

В проводимых ниже расчетах в качестве материала призмы используется полиметилметакрилат (ПММА). Температурные зависимости физико-механических характеристик ПММА приведены в работах [4, 5, 6]. Они показаны на рисунках 2а-в.

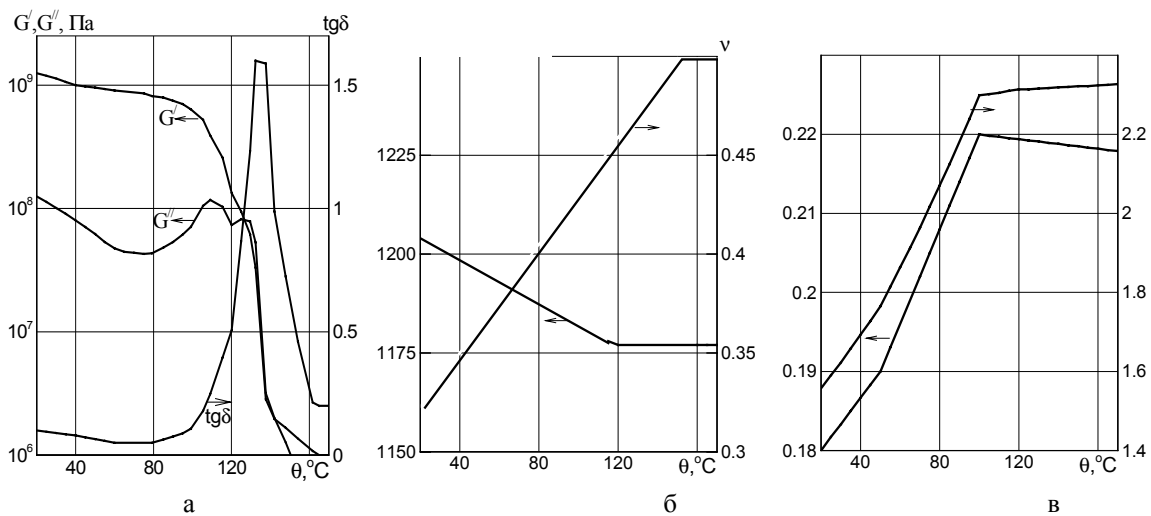


Рисунок 2 – Температурные зависимости физико-механических характеристик ПММА

Жесткое включение предполагается упругой со следующими свойствами:

$$E = 10^{13} \text{ МПа}, \nu = 0,49, k = 1 \text{ Вт/м}^\circ\text{С}, c = 0,7 \cdot 10^3 \text{ Дж/м}^3 \cdot ^\circ\text{С}, \rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Мягкое включение моделируется "пустым" материалом со свойствами воздуха, т.е. рассматривается как полость

$$E = 1 \text{ МПа}, \nu = 0, k = 2,68 \text{ Вт/м}^\circ\text{С}, k/c = 2,17 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}, \rho = 1,2 \text{ кг/м}^3.$$

Случаи жесткого и мягкого включений называются ниже соответственно задачами **R** и **H**.

Геометрия призмы и условия нагружения характеризуются следующими значениями параметров:

$$a = 10^{-3} \text{ м}, r = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, f = \omega/2\pi = 20 \text{ кГц},$$

$$\theta_0 = \theta_c = 20^\circ\text{С}, \gamma = 10 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{С}, \beta = 1, \sigma_0 = 5 \text{ МПа}$$

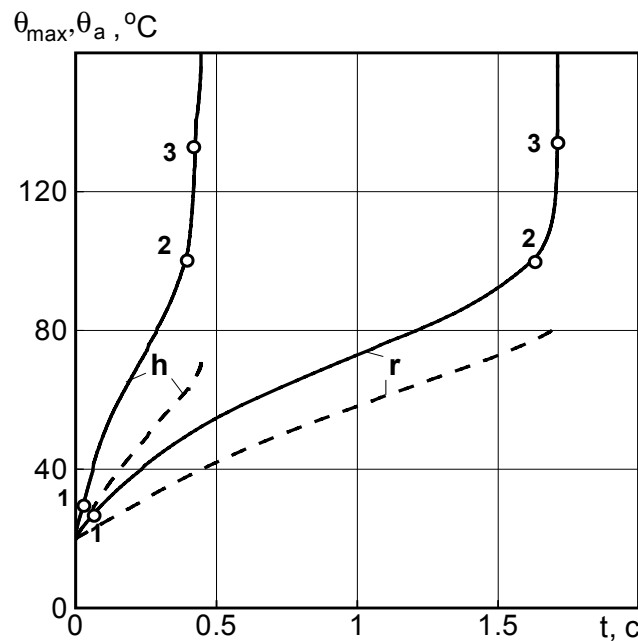


Рисунок 3 – Временные зависимости максимальных θ_{\max} и усредненных по объему θ_a температур разогрева для призмы из ПММА с жесткой и мягкой вставками

На рис. 3 показаны временные зависимости максимальных θ_{\max} (сплошные линии) и усредненных по объему θ_a (штриховые линии) температур разогрева для призмы из ПММА с жесткой и мягкой вставками. Скорость разогрева в задаче **H** выше, поскольку полость увеличивает эффективную податливость ячейки. Поэтому при заданной силовой нагрузке скорость деформации выше и, соответственно, выше интенсивность закачки энергии в тело.

Максимальная разность $\Delta\theta = \theta_{\max} - \theta_a$ имеет место в области резкого нарастания температуры и достигает в обоих случаях $\sim 30^\circ\text{С}$. Излом кривых в окрестности точки 2 соответствует началу перехода материала в жидкую фазу.

На рис. 4,а показана эволюция распределения напряжений $|\tilde{\sigma}_{xz}|$ (штриховые линии) и $|\tilde{\sigma}_{yz}|$ (сплошные линии) для задачи **R**. Жирные цифры отвечают точкам на кривой $\theta \sim t$, приведенной на рис. 3.

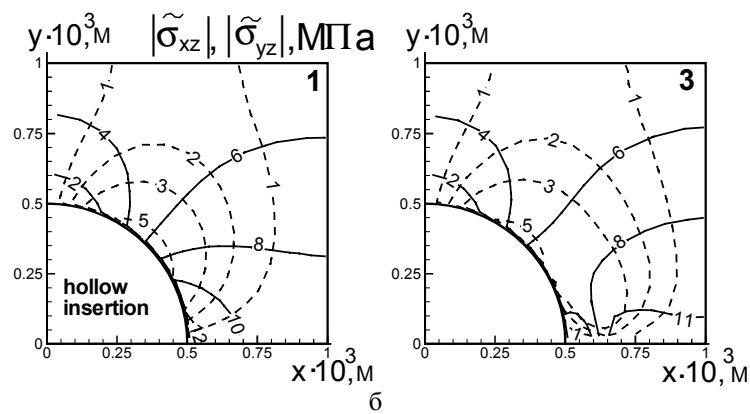
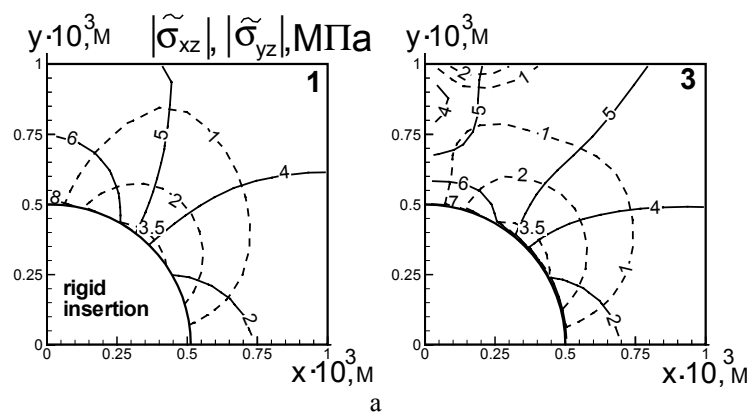


Рисунок 4

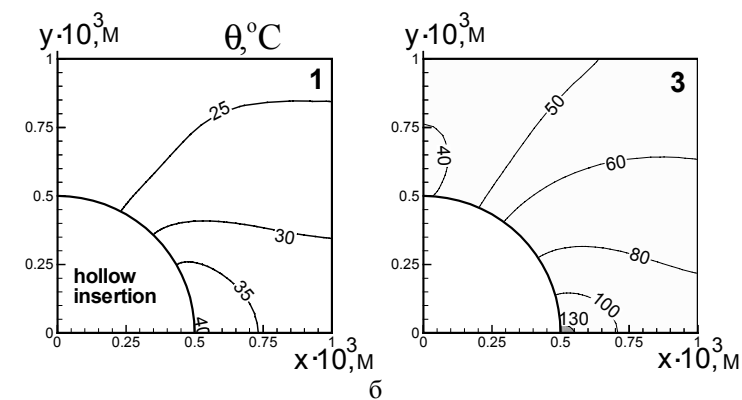
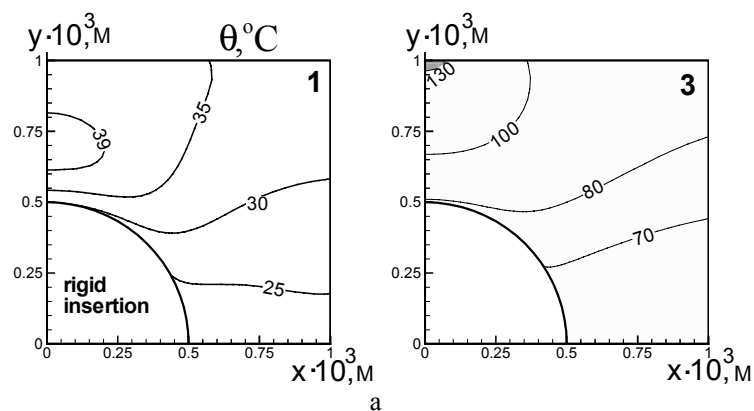


Рисунок 5 – Эволюция распределения напряжений $|\tilde{\sigma}_{xz}|$ (штриховые линии) и $|\tilde{\sigma}_{yz}|$ (сплошные линии) для задачи **R**

В начале разогрева максимальные напряжения имеют место вблизи точек $x = 0, y = r$ для $|\tilde{\sigma}_{yz}|$ и $x = y = \sqrt{2}r/2$ для $|\tilde{\sigma}_{xz}|$. Разогрев (точка 3) приводит к падению уровня напряжений и прорастанию области концентрации в центральную область верхней границы. Это видно также и по характеру распределения температурного поля в начале процесса разогрева и в развитой стадии (Рис. 5,а).

Аналогичные данные для задачи **Н** приведены на рис. 4,б и 5,б. Видно, что напряжения $|\tilde{\sigma}_{xz}|$ локализованы в той же области, а напряжения $|\tilde{\sigma}_{yz}|$ вблизи вставки при $y = 0$, причем в процессе разогрева область концентрации этих напряжений развивается к боковой границе. Здесь же наблюдается зона максимального разогрева (рис. 5,б). Отметим существенную разницу в расположении зон расплава для задач **Р** и **Н**. Как и в задаче о силовом растяжении-сжатии [7], в случае жесткой вставки зона расплава формируется между вставками возле границы, на которой прилагается нагрузка, а в случае мягкой – вблизи вставки рядом со свободной границей.

Список литературы

1. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. - Киев: Наук. думка, 1982.-260с.
2. Якименко Н.М. Теплова нестійкість в'язкопружної прямокутної призми з циліндричними включеннями при зсувному циклічному навантаженні // Вісник КДУ. Сер. Фіз.-мат. наук.-2004.- №2 –С.
3. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.1. Термоупругость. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. –К.1987. 264с.
4. Справочник по пластическим массам // М.И.Гарбар и др. – М.: Изд-во Химия, 1967. – 462с.
5. Теплофизические и реологические характеристики и коэффициенты трения наполненных термопластов. Справочник/Пахаренко В.А.и др. Киев: Наук. думка, 1983.-280с.
6. Хопкинс И., Керкджиан К. Спектры релаксации и релаксационные процессы в твердых полимерах и стеклах / В кн. Физическая акустика, под ред. У. Мезона. Т.1. Часть Б. – М.: Мир, 1969. – 420с.
7. Якименко Н.Н., Сенченков И.К., Червинко О.П. Гармоническое силовое растяжение и виброразогрев прямоугольной вязкоупругой призмы с цилиндрической вставкой / Труды II-ой Всеукраинской науч. конф. «Математичні проблеми технічної механіки», Днепродзержинск, 2002. – С. 130–133.

. В рамках теорії зв'язаної термов'язкопружності надана постановка задачі про коливання та вібророзігрів прямокутної призми з циліндричним включенням при антиплоскому ссилковому зсуві. Розглянуті випадки жорсткого і м'якого включень. Вивчена кінетика вібророзігріву та особливості полів напружень і температури.

In the frame of coupled problem of thermoviscoelasticity the statement of the problem for vibrations and heating of rectangular prism with cylindrical inclusion was deduced. Rigid as well as soft inclusions were considered. The process of heating and peculiarities of distribution of stresses were studied.